PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 h 15

1° Soit $x \longmapsto f(x)$ une fonction continue, positive, décroissante, pour $x \geqslant 1$ et telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Pour n entier supérieur à 1 on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \; ; \qquad I_n = \int_1^n f(t)\,dt \; ; \qquad C_n = S_n - I_n .$$

Montrer que l'on a les inégalités suivantes :

(1) $$C_{n+1} \leqslant C_n$$

(2) $$f(n) \leqslant C_n \leqslant f(1)$$

Montrer que C_n tend vers une limite C lorsque $n \longrightarrow +\infty$ et que l'on a, en posant $\varepsilon_n = C_n - C$, l'inégalité :

(3) $$\int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n+1) \leqslant \varepsilon_n \leqslant f(n) .$$

2° On sait que f vérifiant les conditions ci-dessus, la série $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ sont simultanément convergentes ou divergentes.

Dans le cas de la convergence montrer que l'on a l'inégalité :

$$\sum_{k=n}^{\infty} f(k) \geqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt .$$

Pour obtenir que la différence entre la somme S de cette série et la somme S_n de ses n premiers termes soit inférieure ou égale à $\varepsilon > 0$, donné, montrer qu'il est nécessaire que l'entier n vérifie la condition :

(4) $$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \varepsilon .$$

On pose : $\Sigma_n = C_n + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

Montrer que si l'on choisit l'entier n de sorte que l'on ait la condition :

(5) $$f(n) \leqslant \varepsilon$$

Il en résulte alors : $0 \leqslant \Sigma_n - S \leqslant \varepsilon$.

3° *Applications.*

Soit $\alpha > 0$ un nombre donné et f_α la fonction définie par :

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(x+1)\,\mathrm{Log}^\alpha (x+1)} \text{ pour } x \geqslant 1$$

[Log désigne le logarithme de base e et $\mathrm{Log}^\alpha u = (\mathrm{Log}\, u)^\alpha$]

a. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{k=1}^{\infty} f_\alpha(k)$ est-elle convergente?

b. On choisit $\alpha = 2$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Montrer que la condition (4) $\int_{n+1}^{+\infty} f_2(t)\,dt \leqslant 10^{-3}$ implique $n + 2 \geqslant 10^M$ où l'entier M est un nombre de 3 chiffres (on rappelle que $\log_{10} e = 0{,}43429...$).

La somme S de la série peut-elle être obtenue en pratique, avec une erreur inférieure à 10^{-3}, en calculant la somme d'un nombre suffisant de termes?

c. Montrer que la condition (5) $f_2(n) \leqslant 10^{-3}$ est réalisable pour un nombre n qui s'écrit avec deux chiffres.

Indiquer alors, de façon détaillée et précise, une méthode de calcul de la somme S de la série avec une erreur inférieure à 10^{-3} (sans toutefois effectuer ces calculs...).

d. Quelle est la nature de la série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,\mathrm{Log}\,k}$?

Indiquer une fonction F (x) telle que l'on puisse écrire :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,\mathrm{Log}\,k} = F(n) + \varepsilon_n$$

avec : $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

-FIN-

E.N.S.I. DE CHIMIE GROUPE CENTRE 1978

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail